Ailgéabar: Nótaí ó na Léachta

Dr Rachel Quinlan
School of Mathematics, Statistics and Applied Mathematics, NUI Galway

April 6, 2016

Contents

Chapter 1

Teanga na Matamaitice: Loighic Fhoirmiúil

1.1 Loighic bunaithe ar thairiscintí (propositional logic)

Éiríonn an loighic fhoirmiúil go minic i puzail agus fadhbanna cosúil leis an gceann thíos.

Sampla 1.1.1. *Tá dhá sórt cónaitheoir ar oileán áirithe ar a dtugtar Inis Ciall: Fíoradóirí agus Bréagadóirí (Knights agus Knaves ins an leagan Béarla den chúrsa seo). Insíonn fíoradóirí an fhírinne an t-am ar fad, agus insíonn bréagadóirí bréaga an t-am ar fad. Is bréag é gach ráiteas ó bréagadóir, agus is rud fíor é gach ráiteas ó fíoradóir. Is bréagadóir nó fíoradóir é gach duine a chónaíonn ar Inis Ciall.*

Tugann tú cuairt ar Inis Ciall agus buaileann tú le beirt cónaitheoir, X agus Y.

Deireann X: "Níl ach duine amháin againn inár bréagadóir."
Deireann Y: "Ar a laghad, is fíoradóir é duine amháin againn".

An fadhb atá againn ná X agus Y a aimsiú mar fíradóirí nó bréagadóirí ón chomhrá seo, más féidir linn. Is féidir leanacht ar aghaidh go neamfhoirmiúil mar seo:

Cuir i gcás gur fíoradóir é X. Ansin, tá ráiteas X fíor, agus ciallaíonn sé sin go bréagadóir é Y. Ach ins an chás seo, tá ráiteas Y fíor freisin, agus is neamhréireacht (inconsistency) é a thaispeánann nach féidir gur fíoradóir é X.

Caithfimid anois smaoineamh ar an gcás gur bréagadóir é X. Ansin tá ráiteas X bréagach, agus is bréagadóirí iad an beirt. Tá an conclúid seo ciallmhar, mar ins an chás seo tá ráiteas Y bréagach chomh maith.

Conclúid: Is breagadóirí iad an beirt X agus Y.

Is féidir fadhbanna den chineál seo a réitiú ar bhealach níos córasach, trí *tábla fírinne* (truth table) a scríobh. Tá táblaí mar seo úsáideach le haghaidh fadhbanna níos casta. Ins an faidhb seo, tá ceithre féideartheachta ann mar réiteach:

1. gur fíoradóirí iad X agus Y;
2. gur fíoradóirí é X agus gur bréagadóir é Y;
3. gur bréagadóirí é X agus gur fíoradóir é Y;
4. gur bréagadóirí iad X agus Y.

Scríobhtar na féideartheachtaí seo ins an chéad dhá colún den tábla mar a léirítear thíos. Ins an tríú agus an ceathrú colún de gach líne, scríobhtar na *luachanna fírinne* - F *le haghaidh fíor agus* B *le haghaidh bréagach* (truth values) de Ráiteas X agus Ráiteas Y a mbéadh seasmhach leis an eolas atá ins an chéad dhá ionad.

X	Y	Ráiteas X	Ráiteas Y
F	F	B	F
F	B	F	F
B	F	F	F
B	B	B	B

Chun X agus Y a aimsiú mar fíoradóirí nó bréagadóirí, tá orainn líne a lorg ins an tábla in bhfuil aontas idir an chéad dhá ionad agus an dara dhá ionad - ciallaíonn sé seo go bhfuil na ráitis comhseasmhach leis an samhlú de X agus Y mar fíoradóirí nó bréagadóirí. Ins an sampla seo, níl an comhseasmachas seo le feiceáil ach amháin ins an ceathrú líne; an t-aon conclúid ná gur bréagadóirí iad an beirt.

Nóta: D'fhéadfá sampla a shamhlú le níos mó ná réitiú amháin, nó gan réiteach ar bith. Mar shampla, ní féidir an ráiteas "Is bréagadóir mé" a chloisint ar Inis Ciall. Smaoinigh ar sin, agus scríobh an tábla fírinne a bhaineann leis.

I gcomhthéacs an loighic fhoirmiúil is "luachanna fírinne" iad **fíor (F)** agus **bréagach (B)**. Bíonn athróga (variables) againn a thógann ceann amháin de na luachanna seo.

Sainmhíniú 1.1.2. *Is* tairiscint *(proposition) é ráiteas ar bith atá fíor nó bréagach, go soiléir, i gcomhthéacs áirithe atá i bhfeidhm. Ní féidir le tairiscint bheith fíor agus bréagach ag an am céanna.*

Sampla 1.1.3. *Samplaí de thairiscintí a bhaineann le Sampla 1.1.1:*

- *Is fíoradóir é* X.
- *Is fíoradóir é* X *agus is bréagadóir é* Y.
- *Is fíoradóirí iad* X *agus* Y.
- *Is fíoradóir é duine amháin go cruinn idir* X *agus* Y.

Go minic, úsáidtear siombail amháin (mar shampla $a, b, \dots$) do tairiscint éigin. Tugtar athróg tairisceana (propositional variable) ar siombail den chineál sin. Mar shampla, is féidir na h-ainmneacha p agus q a thabhairt do ráiteas X agus ráiteas Y i Sampla 1.1.1, agus p agus q a shamhlú mar thairiscintí, agus a scríobh ins an tábla fírinne.

- p: Is bréagadóir é duine amháin go díreach de X agus Y (Ráiteas X)
- q: is fíoradóir é duine amháin ar a laghad idir X agus Y (Ráiteas Y).

Le haghaidh comhseasmhachas, is féidir linn na siombail x agus y a úsáid do na thairiscintí gur fíoradóir é X, agus gur fíoradóir é Y. Tá sé feiliúnach freisin go mbeadh nodaireacht againn chun a mhalairt a chur in iúl: tugtar $\neg x$ ("NOT x") don tairiscint *nach* fíoradóir é X. Is é $\neg x$ *séanadh* na tairisceana x.

Tairiscintí bunúsacha do Sampla 1.1.1

1. x: is fíoradóir é X.
2. $\neg x$: ní fíoradóir é X.
3. y: is fíoradóir é Y.
4. $\neg y$: ní fíoradóir é Y.

Anois is féidir na hathróga x, y, p agus q go léir a shamhlú mar thairiscinti, agus is féidir freisin na tairiscintí coimpléasca p agus q a thuiscint i dtéarmaí na buntairisicintí x agus y (agus a malairtí).

- Tá p fíor amháin má tá x fíor agus y bréagach, nó má tá y fíor agus x bréagach. Scríobhtar

$$p = (x \wedge \neg y) \vee (\neg x \wedge y)$$

  chun é seo a chur in iúl.

- Tá q fíor má tá x fíor nó má tá y fíor nó mfá an dá rud x agus y fíor. Scríobhtar

$$q = x \vee y$$

  chun é seo a chur in iúl.

An tábla fírinne arís:

x	y	$p = (x \wedge \neg y) \vee (\neg x \wedge y)$	$q = x \vee y$
F	F	B	F
F	B	F	F
B	F	F	F
B	B	B	B

1.1.1 Nascálaithe loighiciúla (logical connectives)

Sainmhíniú 1.1.4. *Abair gur (bun)tairiscintí iad a agus b i gcomhthéacs loighiciúil éigin.*

1. *Is é* $a \wedge b$ *("a AND "b")* cónasc *(conjuction)* a *agus* b. *Tá* $a \wedge b$ *fíor amháin nuait atá an dá tairiscint* a *agus* b *fíor. Tugann an tábla thíos cur síos ar luachanna fírinne* $a \wedge b$*, idtéarmaí luachanna fírinne na mbuntairiscintí* a *agus* b*.*

a	b	$a \wedge b$
F	F	F
F	B	B
B	F	B
B	B	B

2. *Is é* $a \vee b$ *(*a *OR* b*) an t-aontas (disjunction) de* a *agus* b*. Tá* $a \vee b$ *fíor má tá* a *fíor nó má tá* b *fíor, nó má tá an dá rund fíor. Tá an tábla fírinne do* $a \vee b$ *thíos.*

a	b	$a \vee b$
F	F	F
F	B	F
B	F	F
B	B	B

An ciall a bhaineann le "$\vee$" i dteanga na loighce ná "OR iniatach" (inclusive OR). Is ionann an ráiteas go bhfuil $a \vee b$ *fíor agus an ráiteas go bhfuil ceann amháin* ar a laghad *de* a *agus* b *fíor. Tá difríocht anseo, ar bhealach, idir teanga foirmiúil na loighce agus an gnáthchaint. Sa gnáthchaint, úsáidtear an focal céanna "nó" le hadgaidh "OR iniatach" agus "OR eisiatach" (exclusive OR) agus bíonn an ciall soiléir ón comhthéacs. Mar shampla:*

- *Beidh mé ag caitheamh mo chóta gorm nó mo chóta dubh amárach. (OR eisiatach).*
- *Ar mhaith leat bainne nó siúcra le do chaife? (OR iniatach).*

Chun OR eisiatach idir a *agus* b *a chur in iúl le nodaireacht na loighice, is féidir* $(a \wedge \neg b) \vee (\not{a} \wedge b)$ *a scríobh, mar shampla.*

3. *Is é* $\neg a$ *(NOT* a*) séanadh na tairisceana* a*; tá* $\neg a$ *fíor amháin mura bhfuil* a *fíor. Tá an tábla fírinne de* $\neg a$ *thíos.*

a	$\neg a$
F	B
B	F

Cuir i gcás gur athróga loighiciúil iad a agus b. Do thairiscint p ar bith is féidir a dhéanamh ó a agus b leis na hoibreoirí $\wedge, \vee$ agus $\neg$, is féidir tábla fírinne a scríobh a chuireann in iúl an spleáchas de luachanna fírinne p ar luachanna fírinne a agus b.

Sampla 1.1.5. $p = (a \wedge \neg b) \vee \neg a$.
Más mian linn, is féidir colúin a chur i tábla fírinne b *do píosaí áirithe de* p.

a	b	$a \wedge \neg b$	$\neg a$	$p = (a \wedge \neg b) \vee \neg a$
F	F	B	B	B
F	B	F	B	F
B	F	B	F	F
B	B	B	F	F

Nóta: Tabhair faoi dearadh i Sampla 1.1.5 thuas go bhfuil an tairiscint $p = (a \wedge \neg b) \vee \neg a$ fíor ach amháin nuair atá an dá tairiscint a agus b fíor. Ansin, do ghach rogha de luachanna fírinne a agus b, tá an luach fírinne céanna ag $p = a \wedge \neg b) \vee \neg a$ agus ag an tairiscint $\neg(a \wedge b)$.
Deirtear go bhfuil coibhéis loighiciúil (logical equivalence) idir an dá tairiscint seo. Feicfimid an sainmhíniú "oifigiúil" de coibhéiseach den chineál seo go luath, ach ins an chás seo is féidir an gnáthciall a úsáid chun é a fheiceáil chomh maith.

- Tá an tairiscint $(a \wedge \neg b) \vee \neg a$ fíor má tá $\neg a$ fíor; má tá a bréagach.
- Má tá a fíor, tá $(a \wedge \neg b) \vee \neg a$ fíor amháin ins an chás ina bhfuil b bréagach.
- Ansin, tá $(a \wedge \neg b) \vee \neg a$ fíor go díreach má tá ceann amháin ar a laghad de a agus b bréagach i.e. má tá $\neg a \vee \neg b$ fíor. Tá na luachanna fírinne céanna ag $(a \wedge \neg b) \vee \neg a$ agus ag $\neg a \vee \neg b$.
- I ndeireadh báire, tá $\neg a \vee \neg b$ fíor go díreach má tá ceann amháin ar a laghad de a agus b bréagach, i.e. nach bfhuil an dá tairiscint a agus b fíor. Táimid á rá anseo go bhfuil coibhéis loighiciúil idir na tairiscintí $\neg a \vee \neg b$ agus $\neg(a \wedge b)$.

Conclúid: Tá na tairiscintí $(a \wedge \neg b) \vee \neg a$, $\neg a \vee \neg b$ agus $\neg(a \wedge b)$ go léir coibéiseach le chéile. Is féidir

$$(a \wedge \neg b) \vee \neg a \equiv \neg a \vee \neg b \equiv \neg(a \wedge b)$$

chun an coibhéasachas seo a chur in iúl.

1.1.2 Séanadh (negation)

Tá séanadh (negation) ag gach tairiscint. Tá samplaí ó ghnáthchaint agus ømhata thíos.

- p: Tá Máire in Éirinn.
  $\neg p$: Níl Máire in Éirinn.
- p: Is peileadóiríad Máire agus Seán.
  $\neg p$: Níl sé fíor gur peileadóirí iad Máire agus Seán. *Is peileadóir é ceann amháin acu ar a laghad.*
- p: Tá Aisling san oifig nó tá Aisling sa seomra ranga.
  $\neg p$: Níl sé fíor go bhfuil Aisling san oifig nó go bhfuil sí sa seomra ranga. Níl Aisling san oifig *agus* níl Aisling sa seomra ranga.

- p: Tá an réaduimhir x san eatramh $[2, 4]$ ($2 \leqslant x \leqslant 4$).
  $\neg p$: Níl x san eatramh $[2, 4]$. Tá $x < 2$ nó tá $x > 4$.

Baineann *dlíthe de Morgan* (de Morgan's Laws) le séanadh de aontas nó de chónasc.

Teoirim 1.1.6. *B'ionn na coibheasacha loighiciúla a leanas againn, le haghaidh tairiscintí* p *agus* q *ar bith:*

- $\neg(p \lor q) \equiv \neg p \land \neg q$.
- $\neg(p \land q) \equiv \neg p \lor \neg q$.

Níl dlíthe de Morgan ró-chasta ach tá siad an-úsáideach. Is féidir iad a cruthú le táble fírinne. Mar shampla

p	q	$p \land q$	$\neg(p \land q)$	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \lor \neg q$
F	F	F	**B**	B	B	**B**
F	B	B	**F**	B	F	**F**
B	F	B	**F**	F	B	**F**
B	B	B	**F**	F	F	**F**

Ó thaobh an comhionannas idir Colún 4 agus Colún 7 thuas, tá $\neg(p \land q) \equiv \neg p \lor \neg q$.

Sainmhíniú 1.1.7. *Is* athluaiteachas *(tautology) é tairiscint má tá luach* F *ann le haghaidh gach luach fírinne de na hathróga bunúsacha ar a bhfuil sé bunaithe.*
Is bréagnú *é tairiscint má tá luach* B *ann le haghaidh gach luach fírinne de na hathróga bunúsacha ar a bhfuil sé bunaithe.*

Samplaí

1. Le haghaidh tairiscint p ar bith, is athluaiteachas é $p \lor \neg p$, agus is bréagnú é $p \land \neg p$.
2. Is bréagnú é an ráiteas "Is bréagadóir mé" do cónaitheoir ar Inis Ciall.
3. Is athluaiteachas é an tairiscint $(p \land \neg q) \lor (\neg p \lor q)$.

Más athluaiteachas é an tairsicint p, is féidir $p \equiv F$ a scríobh, nó $q \equiv B$ más bréagnú é q.

1.1.3 Tacair (Sets)

Tá náscanna láidreacha idir an loighic bunaithe ar tairiscintí atá á phlé againn, agus an teoiric a bhaineann le tacair (sets). Sa mhata, is tacair é cnuasach de réad ar a dtugtar baill (elements). Tá analach (analogy) idir an cónasc agus aontas sa loughic agus an idirmhír agus aontas i dteoiric na tacar, agus tá analach freisin idir an séanadh loighiciúil agus comhlánú tacair (set complement).

I gcohmthéacs na tacar, samhlaítear go bhfuil tacar uilíoch X (universal set) ann, agus gur fo-thacar de X é gach tacar atá spéisiúl dúinn. Mar shampla, más iad tacair de réaduimhreacha atá a phlé againn, is é $\mathbb{R}$ an tacar uilíoch. Más tacar é A, is ionann comhlánú A, scríofa mar $\bar{A}$ agus $X \backslash A$. Cuimsíonn $\bar{A}$ na baill de X nach bhfuil in A.

Tá chomhfreagras idir na coincheapanna bunúsacha a bhaineann le tacair, agus na hoibritheoirí loighiciúla atá á phlé againn, mar a léirfear thíos.

Bíodh A agus B ina fo-thacar de tacar uilíoch X, agus bíodh x ina ball de X.

1. Is ionann an ráiteas $x \in (A \cup B)$ agus an tairiscint $(x \in A) \lor (x \in B)$. Tá comhfreagrachas idir an aontas tacair ($\cup$, set union) agus an aontas loihgiciúil $\lor$.
2. Is ionann an ráiteas $x \in (A \cap B)$ agus an tairiscint $(x \in A) \land (x \in B)$. Tá comhfreagrachas idir an aontas tacair ($\cap$, set intersection) agus an cónasc loihgiciúil $\land$.
3. Is ionann an ráiteas $x \notin A$ (nó $x \in \bar{A}$) agus an séanadh $\neg(x \in A)$. Baineann an comhlánú tacair (set complementation) leis an séanadh loighiciúil (logical negation).

4. Is féidir dlíthe de Morgan a thuiscint i dtéarmaí tacair chomh maith. Seo thíos na leagain a bhaineann le tairiscintí agus le tacair.

$\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$	$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$
$\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$	$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

1.2 Argóintí Bailí (Valid arguments)

1.2.1 Preideacáidí (Predicates)

Sampla 1.2.1. *Más slánuimhir (integer) é n is féidir smaoineamh ar an ráiteas*

$$P(n)\text{: Is iolraí de 3 é } n.$$

Tá $P(n)$ fíor má tá $n = 3$ nó 54 nó -18, ach tá $P(n)$ bréagach má tá $n = 5$ nó 101 nó -31. Do gach slánuimhir áirithe k, is tairiscint é $P(k)$ atá go soiléir fíor nó bréagach. Is sampla é $P(n)$ de preideaccáid.

Sainmhíniú 1.2.2. *Is* preideacáid *(predicate) é ráiteas $P(x)$ a bhraitheann ar athróga a thagann ó tacair áirithe, ionas go dtagann an ráiteas go soiléir fíor nó bréagach nuair a chuirtear luachanna in ionaid na hathróga.*

Samplaí

1. $P_1(x, y) : x < y, x, y \in \mathbb{R}$
   Tá $P_1(1, 3)$ fíor mar tá $1 < 3$, tá $P_1(-2, -5)$ bréagach mar níl $-2 < -5$.

2. $P_2(x) : x \geqslant x^2,\ x \in \mathbb{R}$
   Tá $P_2(x)$ fíor amháin má tá $0 \leqslant x \leqslant 1$.

3. $P_3(x)$: Tá léacht san ailgeabar againn ag x : 00 inniu, $x \in \{9, 10, 11, 12, 13, 14\}$
   Tá $P_3(x)$ fíor amháin má tá $x = 10$.

4. $P_4(x)$: Tá $x^2 \geqslant 0$, $x \in \mathbb{R}$.
   Tá $P_4(x)$ fíor le haghaidh gach luach de x sa fearann $\mathbb{R}$.

5. $P_5(x)$: Tá $x^2 < 0$, $x \in \mathbb{R}$.
   Tá $P_5(x)$ bréagach do gach $x \in \mathbb{R}$.

Má tá preideacáid againn agus athróga ann ó fearann áirithe, tá trí féidearthact againn.

- Tá an preideacáid i gcónaí fíor, le haghaidh gach rogha de luachanna do na hathróga sa fearann sonraithe. Sampla: P_4 thuas.
- Tá an preideacáid fíor uaireanta, le haghaidh rogha amháin ar a laghad de luachanna do na hathróga. Sampla: P_2 nó P_3 thuas.
- Níl an preideacáid fíor riamh, tá sé bréagach do gach rogha de luachanna san fhearann. Sample: P_5 thuas.

Preideacáidí Cainníochtaithe (Quantified predicates)
Abair gur preideacáid é $P(x)$ agus gur tacar é S. Do gach ball $a \in S$, tá spéis againn i luach fírinne na tairisceana $P(a)$. Tá nodaireacht speisialta againn.

- $\forall a \in S, P(a)$
  Is é seo an tairiscint: "do gach ball a de S, tá an ráiteas $P(a)$ fíor".
  Tá an tairiscint seo bréagach má tá ball b in S le $P(b)$ bréagach.
  Seasann an siombail $\forall$ le haghaidh "do gach (for all)" . Tugtar an "cainníochtóir uilíoch (universal quanitifier)" air.

- $\exists a \in S, P(a)$
  Is é seo an tairiscint: "is ann do ball amháin a de S, ar a laghad, ionas go bhfuil tá an ráiteas $P(a)$ fíor".
  Tá an tairiscint seo bréagach má tá $P(x)$ bréagach le haghaidh *gach* $x \in S$.
  Seasann an siombail $\forall$ le haghaidh "is ann do (there exists)" . Tugtar an "cainníochtóir eisiach (existential quanitifier)" air.

Samplaí de tairiscintí le preideacáidí cainníochta:

	Fíor	Bréagach
$\forall x \in \mathbb{R},\ \lvert x\rvert \geqslant 0$	✓	
$\exists x \in \mathbb{Q},\ x^2 = 2$		✓
$\forall x \in \mathbb{Z},\ \sqrt{x} \in \mathbb{Z}$		✓
$\exists x \in \mathbb{Z},\ \sqrt{x} \in \mathbb{Z}$	✓	
$\forall n \in \mathbb{Z}, \exists m \in \mathbb{Z}, m > n$	✓	

Má tá $S = \{x_1, x_2, x_3, \dots\}$, tá na coibéiseanna loighiciúla a leanas againn:

- $\forall a \in S, P(a) \equiv P(x_1) \wedge P(x_2) \wedge \dots$
- $\exists a \in S, P(a) \equiv P(x_1) \vee P(x_2) \vee \dots$

Sampla 1.2.3. Séanadh de preideacáidí cainníochta *Is ionann séanadh an ráiteas "is Ford é gach carr sa chlós" agus an ráiteas "tá carr amháin ar a laghad sa chlós nach Ford é".*
Is ionann séanadh an ráiteas "tá Ford amháin ar a laghad sa chlós" agus an ráiteas "níl Ford ar bith sa chlós".

Ráiteas	Séanadh
$\forall x \in S,\ P(x)$	$\exists x \in S,\ \neg P(x)$
$\exists x \in S,\ P(x)$	$\forall x \in S,\ \neg P(x)$

1.2.2 Impleachtaí (Implications)

Sainmhíniú 1.2.4. *Más tairiscintí iad p agus q, is* impleacht *(implication) é an tairiscint*

$$\neg(p \wedge \neg q).$$

Scríobhtar an impleacht seo mar $p \to q$, agus deirtear "impleachtaíonn p q". Is féidir leis an tairiscint $p \to q$ bheith fíor nó bréagach - braitheann a luach fírinne ar luachanna fírinne p agus q. Tá sé bréagach amháin má tá p fi'or agus q bréagach. Ins an tairiscint $p \to q$, is é p an hipitéis *(hypothesis) agus is é q an conclúid (conclusion).*

An tábla fírinne do $p \to q$.

p	q	$p \to q$
F	F	F
F	B	B
B	F	F
B	B	F

Sampla: an tasc roghnú Wason (Wason selection task) Tá ceithre cárta ar an mbord. Tá a fhios agat go bhfuil litir on aibítir ar taobh amháin de gach cárta agus uimhir ar an taobh eile.

Tá tú ag smaoineamh ar an tairiscint seo:

p: *Más guta (vowel) atá ar taobh amháin de cárta ar bith, is ré-uimhir (even number) atá ar an taobh eile.*

Ar an mbord tá an eolas seo scríofa ar na ceithre cárta atá le feiceáil:

B 3 4 E

Ceist: *Chun fírinne an ráiteas* p *a seiceáil, cén cártaí a bhfuil ort chasadh timpeall?*
Freagra: An dara agus an ceathrú cárta. Má tá guta ar an taobh eile den dara cárta, tá an ráiteas bréagach. Más corr-uimhir atá ar an taobh eile den ceathú cárta, tá an ráiteas bréagach.

Níl orainn bacadh leis an gcéad cárta - is cuma an ré-uimhir nó corr-uimhir atá ar an taobh eile de, ní thugann sé aon eolas dúinn faoi fírinne an ráiteas. Freisin, is cuma an guta nó consan atá ar an taobh eile den tríú cárta - ní thugann sé aon eolas dúinn faoi fírinne an ráiteas.

Tá p bréagach amháin má tá carta ann le guta ar taobh amháin agus corr-uimhir ar an taobh eile. Is féidir an tairiscint p a thuiscint mar

$$(\text{guta ar taobh amháin}) \rightarrow (\text{ré-uimhir ar an taobh eile})$$

Tá an ráiteas seo *bréagach amháin* má tá cárta ann le guta ar taobh amháin agus corr-uimhir ar an taobh eile; ansin tá sé coibhéiseach le

$$\neg((\text{guta ar taobh amháin}) \wedge (\text{corr-uimhir ar an taobh eile}).$$

Braitheann fírinne $p \rightarrow q$ amháin ar an luach fírinne atá ag q *nuair atá* p *fíor*. Má tá p bréagach, tá an ráiteas $p \rightarrow q$. Tá coibhéis loighiciúil idir an tairiscint $p \rightarrow q$ agus an tairiscint $\not p \vee q$. Is féidir é seo a fheiceáil ar dhá bhealach:

1. Tá fhios againn go bhfuil $p \rightarrow q$ coibhéiseach le $\neg(p \neg q)$. Ó thaobh dlíthe de Morgan, tá $\neg(p \neg q)$ coibhéiseach le $\neg p \vee \neg(\neg q) \equiv \neg p \vee q$.

   Is féidir tabhairt faoi deara freisin go bhfuil an tairiscint $\neg p \vee q$ fíor i gach cás ina bhfuil p bréagach, agus i ngach cás ina bhfuil q fíor. Ansin tá $\neg p \vee q$ bréagach amháin má tá p fíor agus q bréagach.

2. Tábla fírinne:

p	q	$p \rightarrow q$	$\neg p \vee q$
F	F	F	F
F	B	B	B
B	F	F	F
B	B	F	F

Sainmhíniú 1.2.5. *Más impleacht é* $p \rightarrow q$, *is é*

1. $q \rightarrow p$ *an coinbhéarta (converse) de* $p \rightarrow q$;
2. $\neg p \rightarrow \neg q$ *an inbhéarta (inverse) de* $p \rightarrow q$;
3. $\neg q \rightarrow \neg p$ *an frithdheimhneach (contrapositive) de* $p \rightarrow q$.

Nótaí

1. Tá an impleacht $p \rightarrow q$ agus a frithdheimhneach coibhéiseach le chéile.
   Sampla ón gnáthciall: tá an ciall céanna ag baint leis an ráiteas "má tá John i nGaillimh, ansin tá sé in Éirinn" agus an ráiteas "mura bhfuil John in Éirinn, níl sé i nGaillimh". Go foirmiúil is frithdheimhneacha dá chéile iad an dá ráiteas seo.

2. Níl $p \rightarrow q$ agus a coinbhéarta coibhéiseach le chéile. Mar shampla, is é "Má tá John in Éirinn, tá sé in nGaillimh" an coinbhéarta den ráiteas "má tá John i nGaillimh, ansin tá sé in Éirinn". Tá sé soiléir nach bhfuil an ciall céanna ag an dá tairiscint seo.

3. Is frithdheimhneacha dá chéile iad coinbhéarta $p \rightarrow q$ ($q \rightarrow p$) agus inbhéarta $p \rightarrow q$ ($\neg p \rightarrow \neg q$). Ansin, tá an inbhéarta agus an cóinbhéarta de impleacht coibhéiseach le chéile.

4. De réir ár sainmhíniú, is é $p \wedge \neg q$ séanadh an impleacht $p \rightarrow q$.

5. Tugtar an *dé-impleacht* (bi-implication) ar an tairiscint $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$ agus scríobhtar é mar $p \leftrightarrow q$. Tá an luach fírinne F ann amháin má tá na luachanna fírinne céanna ag p agus ag q.

p	q	$p \rightarrow q$	$q \rightarrow p$	$p \leftrightarrow q$
F	F	F	F	F
F	B	B	F	B
B	F	F	B	B
B	B	F	F	F

1.2.3 Argóintí

Sainmhíniú 1.2.6. *Is liosta ráiteas é* argóint *a thosnaíonn le réamhleaganacha (premises) agus a chríochnaíonn le conclúid (conclusion).*

Tá argóint bailí (valid) amháin má leanann an conclúid go riachtanach ó na réamhleaganacha.

Sampla 1.2.7. *Caitheann tú hata sa chás go gcaitheann tú geansaí, agus sa chás sin amháin.*
Má chaitheann tú hata, ansin ní chaitheann tú seaicéad.
Mar sin de, caitheann tú seaicéad nó caitheann tú geansaí, ach ní caitheann tú an dá rud le chéile.
An argóint bailí nó neamhbhailí atá anseo? *An céad rud atá le déanamh anseo ná na réamhleaganacha agus an conclúid a aimsiú.*

Tá trí buntairiscint ins an scéal seo.

- H: caitheann tú hata;
- G: caitheann tú geansaí;
- S: caitheann tú seaicéad.

Na réamhleaganacha:

1. $H \leftrightarrow G$
2. $H \rightarrow \neg S$

An conclúid: $(S \vee G) \wedge \neg(S \wedge G)$.

Tá an argóint bailí má tá an chonclúid fíor nuair atá na réamhleaganacha go léir fíor. Tá an tábla fírinne le haghaidh an scéal seo thíos.

	H	G	S	$H \leftrightarrow G$	$H \rightarrow \neg S$	$(S \vee G) \wedge \neg(S \wedge G)$
1.	F	F	F	F	B	B
2.	F	F	B	F	F	F
3.	F	B	F	B	B	F
4.	B	F	F	B	F	B
5.	F	B	B	B	F	B
6.	B	F	B	B	F	F
7.	B	B	F	F	F	F
8.	B	B	B	F	F	B

Tá an argóint bailí má tá an conclúid fíor i gach cás ina shásaítear na réamhleaganacha. Is féidir é seo a léamh ón tábla. Is é sraith criticiúl sa táble sraith ina bhfuil na réamhleaganacha go léir fíor. Ins an sampla seo, is iad sraith 2., sraith 7. agus sraith 8. na sraitheanna criticiúla. Tá an conclúid fíor i sraith 2. agus sraith 7., ach tá sé bréagach i sraith 8. Tá seans ann nach caithtear ceann ar bith de hata, geansaí agus seacéaid. Ins an chás sin tá na réamhleaganacha fíor ach tá an conclúid bréagach. Ansin ni leanann fírinne an conclúid go riachtanach ó fírinne na réamhleaganacha. Tá an argóint neamhbailí.

Nóta: Go foirmiúil, is argóint é seiceamh de tairiscint den fhoirm

$$(p_1, p_2, \ldots, p_k) \therefore c.$$

Is iad $p_1, \ldots, p_k$ na réamhleaganacha agus is é c an conclúid. Seasann an soimbail $\therefore$ le haghaidh "dá bhrí sin" no "therefore". Tá an argóint bailí más athluaiteachas é an tairiscint

$$p_1 \wedge \cdots \wedge p_k) \rightarrow c.$$

Braitheann bailíocht argóintár an *fhoirm* amháin, gan ar an ábhar.

Chun bailíocht argóinte a thástáil:

1. Aimsigh na athróga bunúsacha, na réamhleaganacha, agus an conclúid.

2. Déan táble fírinne, le colún amháin le haghaidh gach athróg bunúsach, colún amháin le haghaidh gach réamhleagan, agus colún amháin le haghaidh an conclúid. Líon istigh na luachanna de na réamhleaganach le haghaidh ne féidirtheachtaí go léir de na hathróga bunúsacha. Má fhaightear luach "bréagach" do réamhleagan ar bith, ní gá níos mo obair a dhéanamh ar an sraith sin, níl aon baint ann leis an faidhb.

3. Is iad na *sraitheanna criticiúla* na sraitheanna ina bhfuil na réamhleaganacha go léir fíor. Do gach sraith criticiúil, aimsigh luach fírinne an conclúid. Má tá an conclúid fíor i gach sraith criticiúil, tá an argóint bailí. Más ann do sraith criticiúil ina bhfuil an conclúid bréagach, tá an argóint neamhbhailí.

Samplaí de structúr argóinte bailí

1. $p \rightarrow q, p, \therefore q$ (Modus ponens)
   Sampla: Má tá sé déanach, bíonn sé dorcha. Tá sé déanach. $\therefore$ Tá sé dorcha.

2. $p \rightarrow q, \neg q, \therefore \neg p$ (Modus tollens)
   Sampla: Má tá sé déanach, bíonn sé dorcha. Níl sé dorcha. $\therefore$ Níl sé déanach.

3. $p \vee q, p \rightarrow r, q \rightarrow r, \therefore r$ (Roinnt igcásanna - splitting into cases)

4. $p, \therefore p \vee q$ (Ginearálú - generalization)

5. $p \wedge q, \therefore p$ (Saineolaíocht - specialization)

6. $p \vee q, \neg q, \therefore p$ (Scriosadh - elimination)

7. $p \rightarrow q, q \rightarrow r, \therefore p \rightarrow r$ (Aistreacht - transitivity)

Is ionann *fallás* (fallacy) agus argóint neamhbhailı. Tá sampla thíos de fallás coitianta:

> Tá eolas sa mhata ag gach duine i nGaillimh. Tá eolas sa mhata ag Áine. Ansin, tá Áine i nGaillimh.

Níl an argóint seo bailí, mar mura bhfuil Áine i nGaillimh, tá seans ann fós go bhfuil eolas sa mhata aici, gan aon bréagnú de na réamhleaganacha.
Is sampla é seo den "fallás choinbhéarta", fallás a eiríonn ó mearbhallacht idir impleacht agus a coinbhéarta (converse fallacy). Is é fhoirm an fallás coinbhéarta ná

$$p \to q, q, \therefore p.$$

Mar a thaispeánann an triú sraith den tábla thíos, is argóint neamhbhailí é seo.

p	q	$p \to q$	p
F	F	F	F
F	B	B	
B	F	F	**B**

1.3 Tacair, Feidhmeanna agus Coibhneasa (Sets, Functions and Relations)

Sainmhíniú 1.3.1. *Bíodh A ina thacar (set). Is ionann $\mathcal{P}(A)$, an* chumhacht-thacar *(power set) de A, agus an tacar a chuimsíonn, mar bhaill, na fo-thacair go léir de A.*

$$\mathcal{P}(A) = \{X : X \subseteq A\}.$$

Go háirithe, is iad an tacar folamh $\emptyset$ agus A féin baill de $\mathcal{P}(A)$.

Mar shampla, má tá $A = \{1, 2, 3\}$, tá

$$\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}.$$

Nóta Ní ball de $\mathcal{P}(A)$ é 1 anseo, ach is ball de $\mathcal{P}(A)$ é an tacar $\{1\}$ atá 1 mar bhall amháin ann. Ní ionann iad an ball 1 de A agus an fo-thacar $\{1\}$ de A. Caithimid bheith an-cúramach leis an nodaireacht agus an téarmaíocht nuair a mbíonn tacair á phlé.

Sainmhíniú 1.3.2. *Is ionann* rann tacair *(partition) de tacar A le páirteanna $P_1, P_2, \ldots$ agus tacar $P = \{P_1, P_2, \ldots\}$ leis na coinníollacha seo:*

- *is fo-thacair neamh fholamh de A iad $P_1, P_2, \ldots$*
- *tá na tacair P_i scartha ó chéile (disjoint): $P_i \cap P_j = \emptyset$ do gach $i \neq j$.*
- *Tá gach ball de A cuimsithe i P_i amháin éigin.*

Mar shampla, is rann tacair de $\{1, 2, 3, 4\}$ é $\{\{1\}, \{3\}, \{2, 4\}\}$.

Sampla 1.3.3. *Is rann tacair de $\mathbb{Z}$ é $\{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}\}$ le*

$$\begin{aligned}
\bar{0} &= \{\ldots, -3, 0, 3, 6, \ldots\} = \{3k : k \in \mathbb{Z}\} \\
\bar{1} &= \{\ldots, -2, 1, 4, 7, \ldots\} = \{3k + 1 : k \in \mathbb{Z}\} \\
\bar{2} &= \{\ldots, -1, 2, 5, 8, \ldots\} = \{3k + 2 : k \in \mathbb{Z}\}
\end{aligned}$$

Is iad $\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}$ na ranganna iomchuibheasa (congruence classes) de $\mathbb{Z}$ modulo 3.

Sainmhíniú 1.3.4. *Más tacair iad A agus B, is é an* iolrach Cartéiseach $A \times B$ *de A agus B an tacar a chuimsíonn na ordphéire go l'eir den foirm (a, b) le $a \in A$ agus $b \in B$.*

Samplaí:

1. Má tá $X = \{1, 2\}$ agus $Y = \{a, b, c\}$, tá $X \times Y = \{(1, a), (1, b), (1, c), (2, a), (2, b), (2, c)\}$. Go ghinireálta más tacair críochta iad X agus Y, tá $|X \times Y| = |X|\,|Y|$.
2. Is ionann $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ agus $\mathbb{R}^2$, an phlána Cairtéiseach.
3. Má tá $S = [0, 1]$ agus $T = [1, 2]$, is ionann $S \times T$ agus an fo-thacar de $\mathbb{R}^2$ a chuimsíonn na pointí go léir atá X-choordanáid i $[0, 1]$ agus Y-choordanáid i $[1, 2]$ acu. Is chearnóg líonta atá i gceist anseo.

Níos ghinireálta, do $n \in \mathbb{N}$, is é an iolrach Cairtéiseach de na tacair $S_1, S_2, \ldots, S_n$

$$S_1 \times S_2 \times \ldots S_n = \{(s_1, \ldots, s_n) : s_i \in S_i\}.$$

Sainmhíniú 1.3.5. *Más tacair iad X agu Y, is* coibhneas *ón fearann (domain) X don comh-fearann Y é fo-thacar ar bith den tacar $X \times Y$. Más ionann iad an fearann agus an comh-fearann, deirtear gur coibhneas ar an tacar X é fo-thacar de $X \times X$ (nó X^2).*

Uaireanta, cuireann coibhneas gaol éigin in iúl.

1. Mar shampla, is é an fothacar $S = \{(x, x^2) : x \in \mathbb{R}\}$ an cuar $y = x^2$ sa phlána. Is féidir linn ráiteas mar 2S4 a scríobh chun chur in iúl go bhfuil an pointe $(2, 4)$ sa choibhneas S ins an sampla seo.
2. Is féidir coibhneas S ar na réaduimhreacha a scríobh le

   $$xSy \iff |x| = |y|, \text{ do } x, y \in \mathbb{R}.$$

   Ansin, mar fothacar de $\mathbb{R}^2$, cuimsíonn S na hordphéire go léir den fhoirm (x, x) nó $(x, -x)$. Ins an phlána is ionann S agus an aontas de na línte $y = x$ agus $y = -x$.
3. Más é X an tacar a chuimsíonn na mic léinn go léir in OÉ Gaillimh, is féidir coibhneas R a shainmhíniú ar X le

   $$xRy \iff \text{tá modúl ann le } x \text{ agus } y \text{ cláraithe ann.}$$

Beidh spéis áirithe againn i gcoibhneasa atá sainmhínithe ar tacar amháin, agus ins na gnéith seo a leanas. Bíodh R ina coibhneas at tacar neamh-fholamh X. Ansin is fo-thacar de $X \times X$ é R, agus tá an ciall céanna ag an ráiteas $(a, b) \in R$ agus an ráiteas aRb, do $a, b \in X$.

- Tá R *athfhillteach* (reflexive) má tá xRx (no $(x, x) \in R$) le haghaidh gach $x \in X$.
  Sampla: tá an tríú coibhneas thuas athfhillteach, mar do gach mic léinn x, tá modúl ann le x (agus x) cláraithe ann.
  Sampla de coibhneas nach bhfuil athfhillteach: an coibhneas $\sim$ sainmhínithe ar $\mathbb{Z}$ le $a \sim b \iff a = -b$. Níl $1 \sim 1$ ansin (ach tá $0 \sim 0$).
- Tá R *siméadrach* ma tá $(y, x) \in R$ sa chás go bhfuil $(x, y) \in R$ (nó más fíor é an ráiteas $(x, y) \in R \to (y, x) \in R$ do gach $x, y \in X$). Sampla: tá an triú coibhneas thuas siméadrach, de réir a shainmhíniú.
  Sampla de coibhneas nach bhfuil simeéadrach: an coibhneas $\sim$ sainmhínithe ar $\mathbb{Z}$ le $a \sim b \longleftrightarrow a \leqslant b$. Níl $3 \sim 2$ ansin (ach tá $2 \sim 3$).
- Tá R *aistreach* (transitive) má shásaítear an ráiteas thíos do gach $x, z \in X$:

  Má tá $y \in X$ le $(x, y) \in R$ agus $(y, z) \in R$, ansin tá $(x, z) \in R$.

  Sampla: níl an coibhneas sa tríú sampla thuas aistreach, mar tá seans go mbeadh mic léinn x agus y cláraithe le chéile i Modúl A, agus y agus z le chéile i Modúl B, gan x agus z a bheith cláraithe le chéile i modúl ar bith. Ansin tá xRy agus yRz ach níl xRz.

Sainmhíniú 1.3.6. *Má tá coibhneas* R *athfhillteach, siméadrach agus aistreach, tugtar coibhneas coibhéise (equivalence relation) ar* R.

Sampla 1.3.7. *(Samhradh 2015 Ceist 1)*

(ii) Bíodh $X = \{0, 1, 2, 3, \ldots, 7\}$. *Tugtar an coibhneas* R *ar* $\mathcal{P}(X)$ *mar thacar na hordphéirí seo a leanas*

$$R = \{(A, B) \in \mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}(X) : B = A \text{ nó } B = \bar{A}\}.$$

Taispeáin gur coibhneas coibhéise é R.

(iii) Aimsigh an aicme coibhéise $[A]$, *áit go bhfuil* $A = \{3, 4, 6\}$.

Freagra:
Athfhillteachas: Do $C \subseteq X$, tá $C = C$ agus ansin tá $(C, C) \in R$ de réir an sainmhíniú.
Siméadrachas: Bíodh $(C, D) \in R$ do $C, D \subseteq X$. Ansin tá $D = C$ nó tá $D = \bar{C}$. Sa chéad chás tá $C = D$ agus ansin tá $(D, C) \in R$. Sa dara chás tá $C = \bar{D}$ agus ansin tá $(D, C) \in R$.
Aistreachas: bíodh (C, D) agus (D, E) i $\mathcal{P}(X)$, do fo-thacair C, D, E de X. Ansin tá $D = C$ agus $\bar{D} = \bar{C}$ nó tá $D = \bar{C}$. Ó thaobh an ráiteas $(D, E) \in R$, tá $E = D$ nó tá $E = \bar{D}$, ansin tá $E = D = C$ nó tá $E = D = \bar{C}$ nó tá $E = \bar{D} = \bar{C}$ nó tá $E = \bar{D} = C$. I ngach cás tá $E = C$ nó $E = \bar{C}$, ansin tá $(C, D) \in R$ agus tá R aistreach.

(iii) Is é an aicme coibhéise $[A]$ an fo-thacar de $\mathcal{P}(X)$ a chuimsíonn na ball B de $P(X)$ go léir ionas go bhfuil $(A, B) \in R$. Is é sin

$$[A] = \{A, \bar{A}\} = \{\{3, 4, 6\}, \{0, 1, 5, 7\}\}.$$

Go ghinireálta, más coibhneas coibhéise é R ar tacar X agus más ball de X é a, is é *aicme coibhéise* (equivalence class) a, scríofa mar $[a]$, an tacar a chuimsíonn na baill go léir de X atá gaolta le a ó thaobh an coibhneas R.

$$[a] = \{y \in X : (a, y) \in R\}.$$

Nóta: Níl $[a]$ folamh - tá a ann ar a laghad de réir an athfhillteachas. Dé réir an siméadrachas, is féidir na focail “gaolta le a” a úsáid thuas - is cuma an bhfuilimid ag smaoineamh ar $(a, y) \in R$ nó $(y, a) \in R$, mar is coibhneas siméadrach é R.

Sainmhíniú 1.3.8. *Más coibhneas coibhéise é* $\sim$ *ar tacar* X, *agus más ball é* y *de* X, *tugtar* aicme coibhéise y *(equivalence class of* y*), scríofa mar* $[y]$, *ar an fo-thacar de* X *a chuimsíonn na baill go léir atá gaolta le* y *faoi* $\sim$.

$$[y] = \{z \in X : y \sim z\}.$$

Tá nasc láidir idir coibhneas coibhéise de tacar X agus rann tacair de X, agus baineann sé le haicmí coibhéise. An príomhphointe ná an teorim thíos.

Teoirim 1.3.9. *Bíodh* $\sim$ *ina coibhneas coibhéise ar tacar* X, *agus bíodh* $x, y \in X$. *Ansin* $[x] = [y]$ *má tá* $x \sim y$, *agus* $[x] \cap [y] = \emptyset$ *má tá* $x \not\sim y$.

Samhlaigh $x \sim y$ ar dtús, agus bíodh $a \in [x]$. Tá $y \sim x$ (de réir an siméadreachas) agus tá $x \sim a$, ansin tá $y \sim a$ de réir an aistreachas, agus tá $a \in [y]$. Ansin tá $[x] \subseteq [y]$. Ar an taobh eile, má tá $b \in [y]$, tá $x \sim y$ agus $y \sim b$, ansin tá $x \sim b$ (aistreachas) agus tá $b \in [x]$. Ag an bpointe seo is tacair iad $[x]$ agus $[y]$ le $[x] \subseteq [y]$ agus $[y] \subseteq [x]$, ansin tá $[x]$ agus $[y]$ cothrom le chéile.

Anois abair $x \not\sim y$. Ní féidir ansin go bhfuil ball de X ar bith atá gaolta le x agus y, mar dá mbéadh $x \sim z$ agus $y \sim z$ do z éigin, bhéadh $z \sim y$ (siméadrachas) agus bhéadh $x \sim y$ (aistreachas). An conclúid anseo ná go bhfuil $[x] \cap [y]$ folamh mura bhfuil x agus y gaolta faoi z.

Sampla 1.3.10. *Bíodh* $\equiv$ *an coibhneas iomchuibheasach (congruence relation) modulo 3 ar* $\mathbb{Z}$. *Ansin*

$$a \equiv b \mod 3 \iff 3|(a-b).$$

Ins an sampla seo tá $[3] = [6] = [0]$ agus mar sin de, tá na haicmí seo go léir cothrom le

$$\{\dots, -3, 0, 3, 6, \dots\}.$$

Tá $[1] = [4] = [-2]$ agus mar sin de, tá siad go léir cothrom le

$$\{\dots, -2, 1, 4, 7, \dots\}.$$

Tá $[2] = [5] = [-1]$ agus mar sin de, tá siad go léir cothrom le

$$\{\dots, -1, 2, 5, 8, \dots\}.$$

Tá trí aicmí coibhéise leithleach ann, agus déanann siad rann tacair de $\mathbb{Z}$.

Is scéal ginireálta é seo.

Más coibhneas coibhéise é $\sim$ *ar tacar* X*, agus más iad* $P_1, P_2, \dots$ *na haicmí coibhéise leithleach de* X *faoi* $\sim$*, is rann tacair de* X *é* $\{P_1, P_2, \dots\}$.

Chapter 2

Feidhmeanna, Iomalartaithe, agus Iltéarmaigh

2.1 Feidhmeanna

Sainmhíniú 2.1.1. *Más tacair (neamhfholamha) iad* A *agus* B, *tugtar* feidhm ó A go B *ar choibhneas* $f \subseteq A \times B$ *sháaíonn an coinníoll go bhfuil gach ball de* A *sa chéad ionad in ordphéire amháin go díreach in* f.

Samplaí

1. Is feidhm ó $\mathbb{R}$ go $\mathbb{R}$ é an coibhneas $f = \{(x, x^2+1) : x \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^2$. Cuimsíonn sé ordphéirí den chineál $(2,4), (-2,4), (-3,9), (\frac{5}{2}, \frac{25}{4})$ agus mar sin de. Do gach $x \in \mathbb{R}$, tá cearnóg amháin ag x. Ansin eiríonn gach ball de $\mathbb{R}$ sa chéad ionad i ball amháin de f. If féidir an feidhm f seo a thuiscint mar riail a sheolann gach aon ball de R go ball áirithe de $\mathbb{R}$, scríofa mar $f(x) = x^2 + 1$.

2. Ní feidhm é an coibhneas $g = \{(x^2+1, x) : x \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^2$. Tá an uimhir 10 sa chéad ionad i dhá ball leithleach de g, sin $(10,3)$ agus $(10,-3)$. Ní amháin sin, ach tá uimhreacha i $\mathbb{R}$ nach bhfuil sa chéad ionad i ball ar bith de g, mar shampla -1.

Léiríonn an sainmhíniú thuas an nasc idir feidhmeanna agus coibhneasa - is cás speisialta de coibhneas í feidhm. É sin ráite, is minic a úsaidtear nodaireacht den fhoirm $f : A \to B$ (seachas $f \subseteq A \times B$) chun feidhmeanna a chur in iúl.

Sainmhíniú 2.1.2. *Deirtear gur feidhm* inteilgeach *(injective nó one-to-one) í* $f : A \to B$ *má tá* $f(a_1) \neq f(a_2)$ *i* B *igcónaí nuair atá* a_1 *agus* a_2 *difriúil ó chéile in* A.

Samplaí

1. Níl an feidhm $f_1 : \mathbb{R} \to R$ le $f(x) = x^2 + 1$ inteilgeach mar tá an íomhá céanna ag 3 agus -3 (mar shampla).

2. Is feidhm inteilgeach ó $\mathbb{R}$ go $\mathbb{R}$ í f_2 le $f_2(x) = e^x$.

Más féidir luach x a fháil ar ais ó luach $f(x)$, is feidhm inteilgeach í f.

Sainmhíniú 2.1.3. *Bíodh* $f : A \to B$ *ina feidhm. Is ionann íomhá* f *(image of* f*) agus an fo-thacar de* B *a chuimsíonn na baill go léir a "thagann ó* A *faoi* f*", sin* $\{f(a) : a \in A\}$. *Deirtear go bhfuil* $f : A \to B$ *barrtheilgeach (surjective nó onto) más ionann íomhá* f *agus an tacar iomlán* B. *Ciallaíonn sé go éiríonn gach* $b \in B$ *mar* $f(a)$ *do ball éigin* a *sa tacar* A.

Samplaí

1. Níl an feidhm $f_1 : \mathbb{R} \to R$ le $f(x) = x^2 + 1$ barrtheilgeach mar níl na réaduimreacha go léir ina íomhá - mar shampla níl réaduimhir p ann le $p^2 + 1 - 0$.

2. Ní feidhm barrhteilgeach ó $\mathbb{R}$ go $\mathbb{R}$ í f_2 le $f_2(x) = e^x$, mar cuimsíonn íomhá f_2 na réaduimhreacha dearfacha amháin.

3. Is feidhm barrtheilgeach (agus inteilgeach) í $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ le

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{do} \quad x \geqslant 0 \\ -x^2 & \text{do} \quad x < 0. \end{cases}$$

Sainmhíniú 2.1.4. *Tugtar* feidmh détheilgeach *nó détheilgean (bijective function or bijection) ar feidhm atá inteilgeach* agus *barrtheilgeach.*

Más détheilgean é $f : A \to B$, ciallaíonn sé go bhfuil comhfreagairt aon-le-haon (one-to-one correspondence) idir na baill de A agus na baill de B, de réir na feidhme f. Ins chás seo, tá íomha difriúil i B do gach ball de A faoi f, agus tárlaíonn gach ball de B mar íomhá faoi f de ball amháin de A. Más feidhm détheilgeach é f, is féidir f a mhalartú le feidhm $f^{-1} : BA$, sainmhínithe do $y \in B$ le

$$f^{-1}(y) = \text{an ball amháin } x \text{ in } A \text{ le } f(x) = y.$$

Tugtar inbhéarta f ar an feidhm f^{-1}.

Sampla 2.1.5. *Tugtar détheilgean* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *le*

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{do} \quad x \geqslant 0 \\ -x^2 & \text{do} \quad x < 0. \end{cases}$$

Ansin tugtar $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *le*

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & \text{do} \quad x \geqslant 0 \\ -\sqrt{-x} & \text{do} \quad x < 0 \end{cases}$$

Ansin, mar shampla, tá $f(3) = 9,\ f(-4) = -16$.
Tá $f^{-1}(9) = \sqrt{9} = 3,\ f^{-1}(-16) = -\sqrt{(\,-(-16))} = -\sqrt{(16)} = -4$.
Do gach $x \in \mathbb{R}$, tá $f^{-1}(f(x)) = x$ agus tá $f(f^{-1}(x)) = x$.

2.1.1 Comhshuíomh Feidhmeanna

(composition of functions) Más tacair iad A, B agus C le feidhmeanna $f : A \to B$ agus $g : B \to C$, is féidir iad a chur le chéile chun feidhm $g \circ f$ (g *tar éis* f) a scríobh le $g \circ f(a) = g(f(a))$. Tugtar *comhshuíomh feidhmeanna* (composition of functions) ar an bprócéis seo. Ag smaoineamh ar feidhmeanns mar fothacair de iolraí Cairtéiseacha, tá

$$f \circ g = \{(x, z) : \text{tá } y \in B \text{ le } (x, y) \in f \text{ agus } (y, z) \in g\}.$$

Nóta´

1. Tá $g \circ f : A \to C$ inteilgeach amháin má tá f inteilgeach agus má tá íomhánna difriúla faoi g ag gach ball de $f(A)$. Is é $f(A)$ an fo-thacar de B a chuimsíonn na baill $f(x)$ do gach $x \in A$. Má tá f agus g inteilgeach, tá $g \circ f$ inteilgeach.

2. Tá $g \circ f$ barrtheilgeach amháin más ann do $x \in A$, le haghaidh gach $z \in C$, le $g(f(x)) = z$. Sa chás seo, caithfear go bhfuil g barrtheilgeach. Má tá f agus g barrtheilgeach, tá $g \circ f$ barrtheilgeach.

3. Más feidhmeanna iad f agus g de tacar A go A féin, ansin is feidhmeanna ó A go A iad $f \circ g$ agus $g \circ f$. Go ghinireálta, ní ionann iad na feidhmeanna seo. Is feidhmeanna ó A go A iad $f \circ f$, $f \circ f \circ g$, $g \circ g \circ g$, agus mar sin de freisin. Ó thaobh comhshuíomh feidhmeanna, tá stuctúr ailgéabrach ar an tacar a chuimsíonn na feidhmeanna go léir ó A go A.

Éiríonn an coincheap de comhshuíomh feidhmeanna (nó coibhneasa) sa ghnáthshaol. Mar shampla is féidir smaoineamh ar foclóir Gaeilge-Béarla mar feidhm a thógann focail as Gaeilge thuig a cuid aistriúcháin as Béarla. Sa chaoi céanna, is féidir smaoineamh ar foclóir Béarla-Gearmáinis mar feidhm a thógann focail ó Béarla go Gearmáinís. Má tá an dá foclóir seo ar fáil, is féidir iad a chur le chéile chun focail a aistriú ó Gaeilge go Gearmáinís "tríd" an Béarla. Is chomhshuíomh feidhmeanna atá i gceist anseo.

Sainmhíniú 2.1.6. *Ar tacar ar bith* X, *is é an feidhm chéannachta (identity function) ó* X *go* X *an feidhm a shainmhínítear le*

$$\mathrm{id}_X(x) = x, \text{do gach } x \in X.$$

Is détheilgean é id_X. Más feidhm éigin é $f : X \to X$, is inbhéarta do f í feidhm f^{-1} a shásaíonn

$$f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_X \text{ agus } f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_X.$$

Tá inbhéarta ag f amháin más détheilgean é f.

Ins an caibildil seo táimíd chun staidéar a dhéanamh ar na gnéithe ailgéabracha den tacar a chuimsíonn na détheilgean go léir ar tacar críochta amháin. Tá ainm speisialta ag na feidhmeanna seo - tugtar iomalartaithe (permutations) orthu.

2.2 Iomalartaithe

Bíodh X ina tacar críochta, mar shampla $X = \{1, 2, 3, 4\}$. Tugtar *iomalartú* (permutation) de X ar détheilgean ó X go X. Mar shampla, is iomalartú de X é an feidhm π le

$$\pi(1) = 2,\ \pi(2) = 3,\ \pi(3) = 1, \pi(4) = 4.$$

Go minic, úsáidtear an nodaireacht

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

chun an iomalartú seo a chur in iúl. An príomhrud le tabhairt faoi deara ná go bhfuil gach ball de X scríofa uair amháin go díreach ins an dar sraith thuas. Ansin is féidir smaoineamh ar iomalartú áirithe ar tacar mar athchórithe baill an tacair (rearrangement of the elements). Tá buntáistí ag baint le iomalartú a shainmhíniú mar feidhm áfach, mar ansin is féidir smaoineamh ar chomhshuíomh iomalartaithe agus ar stuctúr ailgéabrach ar iomalartaithe.

Sampla 2.2.1. *Bíodh*

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Is iomalartaithe den tacar $X = \{1, 2, 3, 4\}$ iad π agus σ ansin, agus is féidir na feidhmeanna $\pi \circ \sigma : X \to X$ agus $\sigma \circ \pi : X \to X$ a scríobh. Is iomalartaithe iad an dá feidhm seo chomh maith.

- $\pi \circ \sigma$ (σ ar dtús, ansin π):

$$\begin{array}{ccccc} 1 & \xrightarrow{\sigma} & 3 & \xrightarrow{\pi} & 1 \\ 2 & \to & 1 & \to & 2 \\ 3 & \to & 4 & \to & 4 \\ 4 & \to & 2 & \to & 3 \end{array}$$

  Scríobhtar

$$\pi\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

  Is iomalartú de X é chomhshuíomh de iomalartaithe.

- $\sigma\pi(= \sigma \circ \pi) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

Tabhair faoi deara nach ionann iad $\pi\sigma$ agus $\sigma\pi$. Ní oibríocht cómhalartach (commutative operation) é comhshuíomh iomalartaithe, nó comhshuíomh feidhmeanna go ghinireálta. Tugtar "iolrach iomalartaithe" ar ráiteas den chineál $\tau\sigma$, cé gur chomhshuíomh atá i gciest i ndáiríre.

Téarmaíocht: Seasann S_n don tacar a chuimsíonn na hiomalartaithe go léir de $\{1, 2, \ldots, n\}$. Tá $n!$ (iolrán n, n factorial $= n \times n-1 \times \cdots \times 1$) ball in S_n. Tugtar *an grúpa siméadrach de céim* n (symmetric group of degree n) air.

Tá inbhéarta ag gach iomalartú, agus tá sé éasca go leor an inbhéarta de iomalartú áirithe a scríobh. Mar shampla in S_4, tá

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad \pi^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Is ionann an iomalartú céannachta (identity permutation) in S_n agus an iomalartí a fhágann gach pointe suite, sin

$$\mathrm{id} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & n \\ 1 & 2 & 3 & \ldots & n \end{pmatrix}.$$

Do iomalartú ar bith π, tá $pi\,\pi^{-1} = \pi^{-1}\pi = \mathrm{id}$ - sin an gaol idir iomalartú áirithe agus a inbhéarta.

2.2.1 Ciogail scartha

In S_{14}, bíodh

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 \\ 11 & 9 & 8 & 2 & 5 & 1 & 12 & 14 & 6 & 7 & 3 & 13 & 10 & 4 \end{pmatrix}$$

Tosaigh leis an ball 1 agus féach ar cad a tharlaíonn nuair a chuirtear π i bhfeidhm air arís agus arís eile.

- Ar dtús $1 \to 11$;
- Ansin $11 \to 3$;
- Ansin $3 \to 8$;
- Ansin $8 \to 14$;
- Ansin $14 \to 4$;
- Ansin $4 \to 2$;
- Ansin $2 \to 9$;
- Ansin $9 \to 6$;
- Ansin $6 \to 1$.

Tar éis naoi uair π táimid ar ais ag 1 agus is é seo an céad athscríobh sa liosta. Beidh an scéal mar seo i gcónaí - ní féidir leis an liosta dul ar aghaidh go deo gan athscríobh, mar niall ach líon críochta de baill á iomalartú againn. Má thosaíonn an liosta ag 1, agus má éiríonn an céad athscríobh tar éis k céim, beidh pictiúr mar seo againn:

$$1 \to a_1 \to a_2 \to \cdots \to a_{k-1} \to$$

le $1, a_1, \ldots, a_{k-1}$ difriúil ó chéile. Is ionann an céad ball éile, $a_k = \pi(a_{k-1})$ agus ceann amhín dóibh siúd. Ní féidir go bhfuil $\pi(a_{k-1}) = a_1$ mar is é 1 an ball amháin a théann go a_1 faoi π, agus níl $a_{k-1} = 1$. An scéal céanna faoi a_2, a_3, etc. An féidirtheacht amháin atá fágtha ná go bhfuil $\pi(a_k) = 1$ agus go dúntar an ciogail (cycle) san áit ina thosaíonn sé, sin 1.

Ins an sampla π thuas, tá a ciogail thíos de fhad 9 againn.

$$1 \to 11 \to 3 \to 8 \to 14 \to 4 \to 2 \to 9 \to 6 \to 1$$

Scríobhtar an ciogail seo go minic san fhoirm thíos.

$$(1\ \ 11\ \ 3\ \ 8\ \ 14\ \ 4\ \ 2\ \ 9\ \ 6).$$

Seasann an ráiteas seo don iomalartú in S_{14} a sheolann 1 go 11, 11 go 3, 3 go 8, etc, agus 6 ar ais go 1, agus a fhágann na baill eile sa tacar $\{1, 2, \ldots, 14\}$ suite.

Is féidir π a scríobh mar iolrach de *ciogail scartha* (product of disjoint cycles) a oibríonn ar fo-thacair éagsúla de $\{1, \ldots, 14\}$ atá scartha ó chéile. Chun é seo a dhéanamf, féach ar an céad ball nach bhfuil sa chéad ciogal: 5. Feictear $5 \to 5$, ansin is pointe suite (fixed point) de π a 5. Is féidir smaoineamh air mar ciogal de fhad 1.

Tá baill nach bhfuil le feiceáil fós ins na ciogail atá againn. Is é 7 an céad ceann. Ag chur π i bhfeidhm ar 7, faightear

$$7 \to 12 \to 13 \to 10 \to 7,$$

ciogail de fhad 4.

Conclúid: is féidir π a scríobh mar iolrach (nó comhshuíomh) de ciogail scartha mar a leanas:

$$\pi = (1\ \ 11\ \ 3\ \ 8\ \ 14\ \ 4\ \ 2\ \ 9\ \ 6)(7\ \ 12\ \ 13\ \ 10).$$

Is féidir an pointe suite (5) a scríobh mar ciogal breise sa ráiteas seo más mian, ach de gnáth ní scríobhtar pointí suite i cur síos den chineál seo. Má tá ball as láthair i cur síos de iomalartú idtéarmaí ciogail scartha, tuigtear gut pointe suite atá i gceist.

Nóta: Is iad na tacair $\{1, 3, 2, 4, 6, 8, 9, 11, 14\}$, $\{5\}$ agus $\{7, 10, 12, 13\}$ na *fithisí* (orbits) de π. Tabhair faoi deara go bhfuil gach ball de $\{1, \ldots, 14\}$ i fithis amháin, agus gur rann tacair de $\{1, \ldots, 14\}$ é bailiúcháin na fithisí go léir. Má tá dhá ball a agus b ins an fithis céanna, ciallaíonn sé gur féidir b a fháil ó a de réir π a chur i bhfeidhm arís agus arís eile.

Ceist: In S_{14}, céard é an luach is lú de k ionas go bhfuil $\underbrace{\pi \circ \pi \circ \ldots \pi}_{k}$ cothrom le id?

Nóta: Tugtar π^k ar an iolrach $\underbrace{\pi \circ \pi \circ \ldots \pi}_{k}$.

Freagra don cheist: Smaoinigh ar cad a tharlaíonn do 1 nuair a chuirtear π i bhfeidhm arís agus arís eile. Ó thaobh an léiriú de π le ciogail scartha, tá

$$\pi(1) = 11,\ \pi^2(1) = 3,\ \pi^3(1) = 8, \text{etc.}$$

Faightear 1 ar ais don chéad uair tar éis π a chur i bhfeidm 9 uair. Tá an rud céanna fíor do na baill eile den fithis a chuimsíonn 1. *Tá na baill* $1, 3, 2, 4, 6, 8, 9, 11, 14$ *suite faoi* π^k *amháin más iolrach de 9 é* k. De réir an réasúnaíocht céanna, tá $7, 10, 12, 13$ suite faoi π^k amháin más iolrach de 4 é k. Tá 5 suite faoi gach cumhacht de π.

Conclúid: Tá $\pi^k = \text{id}$ le haghaidh slánuimhir dearfach k amháin más iolrach de 9 agus de 4 é k. Is é 36 an uimihir is ísle leis an dá gné seo.

Sainmhíniú 2.2.2. *Más iomalartú é* π *in* S_n, *tugtar* $\text{ord}(\pi)$ *(order of* π*) ar an slánuimhir dearfach* k *is ísle le* $\pi^k = \text{id}$. *Is ionann* $\text{ord}(\pi)$ *agus an cohmiolraí is lú (least common multiple, lcm) de fhad na ciogail scartha éagsúla i* π.

Nótaí

1. Comhalartaíonn ciogail scartha le chéile, mar shampla, tá

$$(1\ \ 11\ \ 3\ \ 8\ \ 14\ \ 4\ \ 2\ \ 9\ \ 6) \circ (7\ \ 12\ \ 13\ \ 10) = (7\ \ 12\ \ 13\ \ 10) \circ (1\ \ 11\ \ 3\ \ 8\ \ 14\ \ 4\ \ 2\ \ 9\ \ 6) \text{ in } S_{14}.$$

   Oibríonn na ciogail difriúla ar fo-thacair difriúla de $\{1, \ldots, 14\}$, ansin comhalartaíonn siad.

2. Is féidir ciogal áirithe a scríobh ar roinnt bealaí difriúla, mar is féidir ball ar bith a roghnú mar pointe imeachta. Mar shample, in S_5, tá na ciogail

$$(1\,2\,4\,3),\ (2\,4\,3\,1),\ (4\,3\,1\,2), (3\,1\,2\,4)$$

   go léir cothrom le chéile.

3. Lasmuigh den dá nótaí sin, tá cur síos de iomalartú i dtéarmaí ciogail scartha *uathúil* (unique).

2.2.2 Trasuíomh

Tugtar *trasuíomh* (transposition) ar 2-ciogal, nó ciogal de fhad 2.
Tá gnéithe speisialta ag trasuíomh i measc na hiomalartaithe go léir. Ar bhealach amháin, is iad na trasuíomh na hiomalartaithe is simplí (ach amháin an feidhm céanníocht), níl iontu ach malairt de dhá ball. Chomh maith, is ionann gach trasuíomh agus a inbhéarta féin.
cé go bhfuil siad chomh simplí is féidir gach iomalartú a shamhlú mor chomhshuíomh de trasuíomh.

Teoirim 2.2.3. *Is iolrach trasuíomh é gach iomalartú (gan iad a bheith scartha ó chéile).*

Chun an teoirim seo a chruthú, is leor léiriú gur iolrach de trasuíomh é gach ciogal, mar tá a fhios againn gur iolrach ciogail é gach iomalartú. Chun é seo a fheiceáil, féach ar an modh sa sampla thíos.

Sampla 2.2.4. *In S_5, tá*

$$(1\,3\,4\,2\,5) = (1\,3) \circ (3\,4) \circ (4\,2) \circ (2\,5).$$

Ansin, is iolrú de 4 trasuíomh é ciogal de fhad 5, agus go ghinireálta is iolrú de $k-1$ trasuíomh é ciogal de fhad k.
Chun fírinne an ráiteas thuas a fheiceáil, féach ar an cohmsuíomh $(1\ 3) \circ (3\ 4) \circ (4\ 2) \circ (2\ 5)$. Faoin cohmshuíomh iomlán seo,

$$1 \to 3,\ 3 \to 4,\ 4 \to 2,\ 2 \to 5, 5 \to 2 \to 4 \to 3 \to 1.$$

Ansin is ionann an comhshuíomh de 4 trasuíomh anseo agus an ciogal

$$1 \to 3 \to 4 \to 2 \to 5 \to 1,\ (\text{sin } (1\,3\,4\,2\,5).$$

Níl an cur síos de iomalartú mar iolrach trasuíomh uathúail in aon chor, fiú amháin i dtéarmaí an líon trasuíomh atá ann. Mar shampla, i S_3, tá

$$(1\,2) = (1\,3)(3\,2)(1\,3),$$

sample a léiríonn gur féidir le iolrach de trí trasuíomh a bheith cothrom le trasuíomh amháin.
É sin ráite, ní féidir le iomalartú amháin a bheith scríofa le líon trasuíomh atá réidh *agus* le líon trasuíomh atá corr.

Sainmhíniú 2.2.5. *Tá iomalartú* réidh *más féidir é a scríobh mar comhshuíomh (nó iolrach) de líon réidh trasuíomh. Deirtear go bhfuil sín$(\pi) = 1$ más iomalartú réidh é π.*
Tá iomalartú corr *más féidir é a scríobh mar comhshuíomh (nó iolrach) de líon réidh trasuíomh. Deirtear go bhfuil sín$(\pi) = -1$ más iomalartú corr é π.*

Sampla 2.2.6. *In S_9, bíodh*

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 4 & 7 & 9 & 3 & 2 & 8 & 5 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

Scríobh π mar iolrach ciogail agus mar iolrach trasuíomh. Aimsigh $\mathrm{ord}(\pi)$ *agus sín*(π).

Réiteach:
$\pi = (1\,4\,3\,9)(2\,7\,5)(6\,8)$ (iolrach ciogail).
$\pi = (1\,4)(4\,3)(3\,9)(2\,7)(7\,5)(6\,8)$ (iolrach trasuíomh).
Tá $\mathrm{ord}(\pi) = \mathrm{lcm}(4, 3, 2) = 12$.
Tá sín$(\pi) = 1$, mar tá 6 trasuíomh ins an cur síos thuas agus is uimhir réidh é 6.

2.3 Iltéarmaigh (Polynomials)

Sa mhata, is *fáinne* (ring) é structúr ailgéabrach inar féidir baill a suimiú (add) agus a iolrú (multiply), faoi réir coinníollacha áirithe a mbíonn i bhfeidhm.

Samplaí de fáinne:

- $\mathbb{Z}$ - na slánuimhreacha (leis an gna'th suimiú agus iolrú)
- $\mathbb{R}$ - na réaduimhreacha (leis an gna'th suimiú agus iolrú)
- $\mathbb{Z}_n$ - na slánuimhreacha modulo n, le haghaidh slánuimhir dearfach n ar bith.
- $M_2(\mathbb{Q})$ - na máitrísí 2×2 le baill ó $\mathbb{Q}$, le suimiú agus ilrú máitrísí.

Bíonn na rialacha seo a leanas i bhfeidhm i *fáinne* R:

- Tá suimiú comhalartach: tá $a + b = b + a$ i gcónaí, do baill a, b de R.
- Tá suimiú *comhthiomsaitheach*: tá $(a + b) + c = a + (b + c)$ i gcónaí.
- Tá *ball nialas* (zero element) sa fáinne ar a dtugtar $)_R$; an gné speisialta den ball seo ná téann sé i bhfeidhm ar baill eile faoin suimiú: tá $a + 0_R = a$ i gcónaí.
- Do gach ball den fáinne, t'a *inbhéarta suimitheach* (additive inverse) no *diúltú* (negative) dó sa fáinne freisin. Faightear 0_R mar do ball ar bith agus a diúltú.
- Tá iolrú comhthiomsaitheach: tá $a \times (b \times c) = (a \times b) \times c$ i gcónaí.
- Sásaítear na *dlíthe dáileacha* (distributive laws):
  - $a \times (b + c) = (a \times b) + (a \times c)$
  - $(a + b) \times c = (a \times c) + (b \times c)$.

Mar shampla, ní fáinne é an tacar $\mathbb{N}$ mar, cé go bhfuil suimiú agus iolrú ann, níl ball nialas ann agus níl inbhéarta suimuitheach sa tacar $\mathbb{N}$ féin ag gach ball de $\mathbb{N}$.

Tugtar *réimse* ar fáinne F leis na gnéithe breise seo a leanas.

- Tá iolrú comhalartach: $a \times b = b \times a$ i gcónaí.
- Tá ball céannacht ann le haghaidh iolrú, ar a dtgutar 1_F: $1_F \times a = a$ i gcónaí.
- Do gach ball de F ach amháin an ball nialas, tá *inbhéarta iolrach* in F dó. Mas inbhéarta iolracha iad x agus x^{-1} dá chéile, ciallaíonn sé go bhfuil $x \times x^{-1} = 1_F$.

Is samplaí de réimse iad $\mathbb{Q}, \mathbb{R}$ agus $\mathbb{C}$. Ní réimse é $\mathbb{Z}$ mar níl inbhéarta iolrach i $\mathbb{Z}$ ag gach ball de $\mathbb{Z}$.

Más réimse atá i gceist, ciallaíonn sé go neamhfhoirmiúil gur féidir roinnt a dhéanamh sa chóras, chomh maoith le suimiú, dealú agus iolrú. Is réimse é $\mathbb{Z}_n$ amháin más uimhir príomha é n. Ní réimse é $\mathbb{Z}_6$ - níl inbhéarta ag an ball 3 i $\mathbb{Z}_6$ mar shampla. I Z_5, is inbhéartaí dá ch'eile iad 3 agus 2 mar tá $3 \times 2 \sim 1 \mod 5$.

Beidh spéis againn do réimse F ins an fáinne a chuimsíonn na *iltéarmaigh* go léir leis an athróg x agus le comhéifeachtaí in F.

Sainmhíniú 2.3.1. *Do réimse* F, *tugtar* $F[x]$ *ar an fáinne a chuimsíonn na iltéarmaigh go léir le athróg* x *agus le comhéifeachtaí in* F, *sin na rudaí go léir den fhoirm*

$$a_k x^k + a_{k-1} x^{k-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

le $a_0, \ldots, a_k \in F$ *agus slánuimir* k, $k \geqslant 0$.

Samplaí

1. In $\mathbb{Q}[x]$, is iltéarmach é $p(x) = 2x^4 - 3x^2 + 5x - 6$, de céim 4. Is é an céim (degree) an éaspónant ar an cumhacht is airde de x atá i láthair san iltéarmaigh (gan 0 mar comhéifeacht). Scríobhtar $\deg(p(x)) = 4$.

2. In $Z_3[x]$, is iltearmach é $x^2 + 1$. Baineann sé leis an feidhm ó $\mathbb{Z}_3$ go $\mathbb{Z}_3$ le

$$0 \to 0^2 + 1 = 1, \;\; 1 \to 1^2 + 1 = 2, \;\; 2 \to 2^2 + 1 = 2 \text{ in } \mathbb{Z}_3.$$

   Tabhair faoi deara go bhfuil an feidhm céanna ag baint leis an iltéarmach seo agus le $x^3 + x^2 + 2x + 1 \in \mathbb{Z}_3[x]$. Ní ionann iad ha hiltéarmaigh seo ach baineann siad leis an feidhm céanna ó $\mathbb{Z}_3$ go $\mathbb{Z}_3$. Is féidir le rudaí mar seo tarlú nuair atá réimsí críochta i gceist.

Teoirim 2.3.2. *(Algartam Roinnte - Division algorithm) Más réimse é F agus más iltéarmaigh iad $f(x)$ agus $g(x)$ in $F[x]$, le $g(x) \neq 0$, is féidir $f(x)$ a roinnt ar $g(x)$ chun iltéarmaigh $q(x)$ agus $r(x)$ in $F[x]$ a fháil ionas go bhfuil*

$$f(x) = q(x)g(x) + r(x),$$

le $\deg(r(x)) < \deg(g(x))$.

Tugtar an líon (quotient) agus an fuílleach (remainder) de $f(x)$ i ndiaidh roinnt ar $g(x)$ ar na hiltéarmaigh $q(x)$ agus $r(x)$ faoi seach.

Nílimís chun cruthúnas foirmiúil a thabhairt don teoirim seo, ach is féidir samplaí a úsáid chun an ciall a bhaineann leis a léiriú. “Roinnt fada” nó “long division” atá i gceist.

Sampla 2.3.3. *Faigh an líon agus an fuílleach nuair a roinntear $5x^4 + 6x^3 + 7x^2 + x + 1$ ar $x^2 + 1$ in $\mathbb{Q}[x]$.*

Réitiú

$$\begin{array}{r|rrrrrrrrr}
 & 5x^2 & + & 6x & + & 2 & & & & \\ \cline{2-10}
x^2+1 & 5x^4 & + & 6x^3 & + & 7x^2 & + & x & + & 1 \\
 & 5x^4 & + & & & 5x^2 & & & & \\ \cline{2-10}
 & & & 6x^3 & + & 2x^2 & + & x & + & 1 \\
 & & & 6x^3 & + & & & 6x & & \\ \cline{4-10}
 & & & & & 2x^2 & - & 5x & + & 1 \\
 & & & & & 2x^2 & + & & & 2 \\ \cline{6-10}
 & & & & & & - & 5x & - & 1
\end{array}$$

Líon: $5x^2 + 6x + 2$; Fuílleach: $-5x - 1$.
Conclúid: $5x^4 + 6x^3 + 7x^2 + x + 1 = (x^2 + 1)(5x^2 + 6x + 2) + (-5x - 1)$.

Sampla 2.3.4. *Faigh an líon agus an fuílleach nuair a roinntear $x^3 + 5x + 5$ ar $x + 1$ in $\mathbb{Z}_{11}[x]$.*

Réitiú

$$\begin{array}{r|rrrrrrr}
 & x^2 & + & 10x & + & 6 & & \\ \cline{2-8}
x+1 & x^3 & & & + & 5x & + & 5 \\
 & x^3 & + & x^2 & & & & \\ \cline{2-8}
 & & & 10x^2 & + & 5x & + & 5 \\
 & & & 10x^2 & + & 10x & & \\ \cline{4-8}
 & & & & & 6x & + & 5 \\
 & & & & & 6x & + & 6 \\ \cline{6-8}
 & & & & & & & 10
\end{array}$$

Líon: $x^2 + 10x + 6$; Fuílleach: 10.
Conclúid: $x^3 + 5x + 5 = (x + 1)(x^2 + 10x + 6) + 10$ i $\mathbb{Z}_{11}[x]$.

Nóta ar an dara sampla thuas. I $\mathbb{Z}_{11}[x]$, is ionann $x + 1$ agus $x - 10$. Ma chuirtear 10 in ionad x i $x^3 + 5x + 5$, faightear

$$(10)^3 + 50 + 5 = 10 + 6 + 5 = 10 \text{ i } \mathbb{Z}_{11}.$$

Is ionann an 10 seo agus an fuílleach i ndiaidh $x^3 + 5x + 5$ a roinnt at $x - 10$. Is cás é seo de scéal níos ginireálta.

Teoirim 2.3.5. *Más iltéarmach é $f(x)$ thar réimse F, agus más ball de F é a, is ionann $f(a)$ agus an fuílleach i ndiaidh $f(x)$ a roinnt ar $x - a$.*

Cruthúnas: De réir Teoirim 2.3.2, is ann do iltéarmaigh $q(x)$ agus r, le

$$f(x) = (x - a)q(x) + r,$$

agus $r \in F$ (mar tá $r = 0$ nó céim $r = 0$). Ag chur a in ionad x anseo, faighimid $f(a) = (a - a)q(a) + r = r$.

Bíodh $f(x) \in F[x]$ agus $a \in F$. Is *fréamh* de $f(x)$ é a má tá $f(a) = 0$. Is atoradh de Teorim 2.3.3 thuas é an *Teoirim Factóir* a leanas.

Teoirim 2.3.6. *(Teoirim Factóir) Bíodh $f(x) \in F[x]$ agus $a \in F$. Tá $f(x) = 0$ más factóir de $f(x) = (x - a)$ agus amháin ins an chás sin.*

Sampla 2.3.7. *I $\mathbb{Q}[x]$, is fréamh é 3 de $f(x) = x^3 - 2x^2 - 4x + 3$, agus tá*

$$x^3 - 2x^2 - 4x + 3 = (x - 3)(x^2 + x - 1).$$

Is factóir de $f(x)$ é $x - 3$.

Sainmhíniú 2.3.8. *Tá iltéarmach* $f(x) \in F[x]$ dolaghdaithe thar F *(irreducible over F) má tá a céim ar a laghad cothrom le 1, agus mura féidir é a scríobh mar iolrach de dhá factóir de céim $\geqslant 1$ in* $F[x]$.

Nótaí

1. Tá iltéarmach *inlaghdaithe* mura bhfuil sé dolaghdaithe.
2. Má tá céim $f(x) = 1$, tá $f(x)$ dolaghdaithe.
3. Tá $x^2 + 1$ dolaghdaithe thar $\mathbb{R}$, ach tá sé inlaghdaithe thar $\mathbb{C}$; tá $(x - i)(x + i)$ mar factóiriú de thar $\mathbb{C}$.
4. Má tá céim $f(x)$ níos mó ná 1, agus má tá fréamh a ag $f(x)$ in F, ansin tá $f(x)$ inlaghdaithe de réir Teoirim 2.3.4, mar is féidir é a scríobh mar $(x - a)q(x)$.
5. Mura bhfuil fréamh ag $f(x)$ in F, tá seans ann fós go bhfuil $f(x)$ inlaghdaithe thar F, mar shampla, níl fréamh in $\mathbb{R}$ ag $x^4 + 2x^2 + 1$, ach is féidir é a factóiriú mar $(x^2 + 1)(x^2 + 1)$.
6. Do gach iltéarmach $f(x)$ in $F[x]$, tá léiriú uathúil de $f(x)$ mar iolrach de iltéarmaigh dolaghdaithe in $F[x]$. Go ghinireálta, bíonn sé an-deacair an léiriú seo a fháil amach, ach is féidir cruthú go bhfuil sé ann. Is féidir iarracht a dhéanamh le iltéarmach de céim íseal áfach, mar shampla le fréamhacha a lorg.

Sampla 2.3.9. *(Samhraidh 2015) Faigh na factóirí dolaghdaithe de $x^3 + 5x^2 + 2x + 6$ in $\mathbb{Z}_7[x]$.*

Réitiú: Scríobh $p(x) = x^3 + 5x^2 + 2x + 6$ in $\mathbb{Z}_7[x]$.
Ar dtús, cuardaigh ar fréamhacha de $p(x)$ i $\mathbb{Z}_7$.

$$p(1) \quad = \quad 1 + 5 + 2 + 6 = 14 = 0 \text{ in } \mathbb{Z}_7.$$

Tá rogha againn anois - tá a fhios againn go bhfuil $(x - 1) = (x + 6)$ mar factóir amháin ag $p(x)$. Id féidir linn $p(x)$ a roinnt ar $(x - 1)$ (nó is féidir linn níos mó fréamhacha a lorg). Faighimid

$$x^3 + 5x^2 + 2x + 6 = (x - 1)(x^2 + 6x - 6) = (x + 6)(x^2 + 6x + 1).$$

Scríobh $q(x) = x^2 + 6x + 1$ agus cuardaigh ar fréamhacha de $q(x)$ i $\mathbb{Z}_7$.

$$q(5) = 25 + 30 + 1 = 56 = 0.$$

Ansin is factóir de $q(x)$ é $x - 5$ nó $x + 2$ i $\mathbb{Z}_7[x]$. Ó thaobh roinnt a dhéanamh arís nó ó thaobh an triú fréamh a lorg, feictear go bhfuil $x - 3$ nó $x + 4$ mar factóir ann freisin.
Conclúid: $p(x) = (x + 6)(x + 2)(x + 4)$.

Sampla 2.3.10. *Faigh na factóirí dolaghdaithe de* $p(x) = x^3 + 2x^2 + 3x + 1$ *i* $\mathbb{Z}_5[x]$.

Réitiú: Feictear go bhfui $p(3) = 125 + 50 + 9 + 1 = 185 = 0$ i $\mathbb{Z}_5$, ansin is fréamh de $p(x)$ é 3 agus is factóir é $x - 3$ nó $x + 2$. I ndiaidh roinnt, faightear

$$p(x) = (x + 2)(x^2 + 3).$$

Tar éis $0, 1, 2, 3, 4$ a chur in ionad x, feictear nach bhfuil fréamh ag $x^2 + 3$ i $\mathbb{Z}_5$, ansin tá an iltéarmach $x^2 + 3$ dolaghdaithe thar $\mathbb{Z}_5$. Is iad $x + 2$ agus $x^2 + 3$ na factóirí dolaghdaithe de $p(x)$ i $\mathbb{Z}_5[x]$.

Nóta: Níl sé fíor i gcónaí go bhfuil iltéarmach do laghdaithe thar réimse F mura bhfuil fréamhacha in F ann. Ach tá s'e fíor má tá céim an iltéarmaigh cothrom le 2 nó 3. Ins na cásanna seo, má tá factóirí ag an iltéarmach i $F[x]$, tá factóir ann de céim 1, agus ansin tá fréamh ag an iltéarmach i F.

Chapter 3

Ionduchtú agus Ailgéabar Mhaitríse (Induction and Matrix Algebra)

3.1 Prionsabal an Ionduchtaithe (The Induction Principle)

Sampla 3.1.1. *Cruthaigh gur iolraí de 6 é $7^n - 1$ le haghaidh gach uimhir aiceanta (natural number) n.*

Conas is féidir fadhb mar seo a láimhseáil? Le haghaidh luach áirithe de n, is féidir seiceáil díreach a dhéanamh, ach tá líon éigríochta de luachanna difriúla i gceist.

1. Má tá $n = 1$, tá $7^n - 1 = 6$ agus tá sé soiléir go bhfuil an ráiteas fíor ins an chás seo.

2. Má tá an ráiteas fíor do luach éigin k de n, is féidir comparáid a dhéanamh idir an leagan den ráiteas le haghaidh $n = k+1$ agus an leagan le haghaidh $n = k$, agus iarracht a dhéanamh chun taispeáint go leanann fírinne an ráiteas do $n = k+1$ ón chás $n = k$.

3. Ansin, glac leis an ráiteas gur iolraí de 6 é $7^k - 1$, agus féach ar $7^{k+1} - 1$. Tá

$$7^{k+1} - 1 = 7(7^k) - 1 = 7(7^k - 1) + 6.$$

   Anois is iolraí de 6 é $7^k - 1$ (de réir an hipitéis atá againn) agus is iolraí de 6 é 6, ansin is iolraí de 6 é $7(7^k - 1) + 6 = 7^{k+1} - 1$. Taispeáineann an argóint seo go bhfuil an ráiteas fíor do $n = k+1$ má tá sé fíor do $n = k$.

4. Ag chur gach rud le chéile: tá a fhios againn (go díreach) go bhfuil an ráiteas fíor ag $n = 1$ (seo an *bunchás (base)*). Agus tá bealach againn chun fírinne an ráiteas ag $n = k+1$ a d'eaduchtáil óna fírinne ag $n = k$, do luach ar bith de $k \in \mathbb{N}$ (seo an *céim ionduchtaithe (induction step)*). Ach chur an argóint seo i bhfeidhm le $k = 1$, faightear go bhfuil an ráiteas fíor do $k = 2$ chomh maith, agus ansin do $k = 3$, agus mar sin de. Tá s'e fíor do gach uimhir aiceanta, de réir an céim ionduchtaithe a chur i bhfeidhm arís agus arís eile, do luachanna comhleantacha de k.

Tá an ráiteas cruthaithe againn le *Prionsabal an Ionduchtaithe*.

Teoirim 3.1.2. *(Prionsabal an Ionductaithe)*
Bíodh $P(n)$ ina ráiteas faoi na hiumhreacha aiceanta n (tá leagan de $P(n)$ i bhfeidhm le haghaidh gach uimhir aiceanta áirithe n). Tá $P(n)$ fíor do gach n má shásaítear na coinníollacha thíos.

1. *Tá $P(1)$ fíor (seo an* bunchás (base case)*).*

2. *Impleachtaíonn fírinne $P(k)$ fírinne $\Longrightarrow P(k+1)$ le haghaidh gach $k \in \mathbb{N}$ (tugtar an* hipitéis ionduchtach (induction hypothesis) *ar an ráiteas go bhfuil $P(k)$ fíor ins an chomhthéacs seo)*

3.2 Ailgéabar Mhaitríse

3.2.1 Deitéarmanaint agus Cuingigh (Determinants and Adjoints)

Let haghaidh maitrís 2×2, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, is ionann *deitéarmanant* A agus an uimhir $ad - bc$; scríobhtar

$$\det(A) = ad - bc, \text{ nó } |A| = ad - bc, \text{ nó } \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc.$$

Tá a fhios againn go bhfuil inbhéarta ag A amháin má tá $\det(A) \neq 0$.

Id féidir deitéarmanant A a ríomh go ghinireálta le haghaidh maitrís cearnach A de chruth $n \times n$. is sainmhíniú athchúrsach atá i dceist; braitheann $\det(A)$ ar deitéarmanaint de mhaitrísí atá níos lú ná A. Chun an modh ibre a thuiscint, bainfimid leas as an sampla 4×4

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Bíodh A ina maitrís cearnach ($n \times n$). Do gach iontráil (entry) A_{ij} de A, is ionann mionúr (minor) A_{ij} agus deitéarmanant na maitríse a fhaightear tar éis sraith i agus colún j a scriosadh ó A. Scróbhfaimid M_{ij} le haghaidh mionúr A_{ij}.
   Inár sampla, tá
   $$M_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}, \quad M_{12} = \begin{vmatrix} 0 & 5 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ -3 & -1 & 1 \end{vmatrix}.$$

2. Le haghaidh gach ionad (i, j) sa mhaitrís, is ionann comhfhachtóir (cofactor) na hiontrála A_{ij} agus an mionúr M_{ij} iolraithe faoi $(-1)^{i+j}$. Tugtar C_{ij} ar an chomhfactóir - is ionann an chomfactóir agus an mionúr más ré-uimhir é $i + j$; is diúltaigh tá chéile iad más corr-uimhir é $i + j$. Le haghadh $n = 4$, tá aontas idir an chomhfactóir agus an mionúr ins na hionadaí le $+$ thíos:
   $$\begin{pmatrix} + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \\ - & + & - & + \end{pmatrix}.$$

3. Chun $\det(A)$ a fháil: roghnaigh sraith nó colún de A. Is cuma cén ceann, ach má tá ceann ann le roinnt 0 mar iontrálacha, is caothúil an ceann sin a roghnú. Faigh an iolrach de gach iontráil de do rogha sraith no colún leis a chomhfactóir féin; is é $\det(A)$ suim na huimhreacha seo. Mar shampla
   $$\begin{aligned} \det A &= A_{11}C_{11} + A_{12}C_{12} + \cdots + A_{1n}C_{1n} \quad \text{(céad sraith)} \\ \det A &= A_{11}C_{11} + A_{21}C_{21} + \cdots + A_{n1}C_{n1} \quad \text{(céad colún)} \\ \det A &= A_{21}C_{21} + A_{22}C_{22} + \cdots + A_{2n}C_{2n} \quad \text{(dara sraith)} \end{aligned}$$
   Níl sé go hiomláin soiléir ag an bpointe seo nach braitheann an freagra ar an sraith no colún a roghnaítear, ach ní bhraitheann.

4. Le haghaidh an sampla
   $$A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

roghnaimid an chéad colún chun an deitéarmanat a ríomh le modh na chomhfactóirí. Ansin tá

$$\begin{aligned}\det A &= 5\times C_{11}+0\times C_{21}+1\times C_{31}+(-3)\times C_{41}\\ &= 5\times M_{11}-0\times M_{21}+1\times M_{31}-(-3)\times M_{41}\end{aligned}$$

Tá orainn na mionúir M_{11}, M_{31} agus M_{41} a ríomh, de réir modh na chomfactóirí arís. Le haghaidh maitrís 3×3, is ionann na mionú ir agus na comhfactóirí de na hiontráilí sna hionaid le "+" thíos, agus is diúltaigh dá chéile iad ins na hionaid le "−".

$$\begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix}.$$

- $M_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$. Ag usáid an dara sraith,

$$M_{11} = (-1)(2)\times\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} + (-1)1\times\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2\times 7 - 1\times(-6) = -8.$$

- $M_{31} = \begin{vmatrix} -2 & 4 & -1 \\ 1 & 5 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$. Ag usáid an céad sraith,

$$\begin{aligned}M_{31} &= (-2)\times\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} + (-1)(4)\times\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + (-1)\times\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}\\ &= (-2\times 7)+(-4\times(-1))+(-1\times -6) = -4.\end{aligned}$$

- $M_{31} = \begin{vmatrix} -2 & 4 & -1 \\ 1 & 5 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$. Ag usáid an tríú sraith,

$$M_{41} = (2)\times\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} + 1\times\begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 2\times 13 + 1\times(-14) = 12.$$

Ansin, tá $\det(A) = 5\times(-8)+1\times(-4)-(-3)\times 12 = -8$.

Baineann na gnéithe seo a leanas leis an deitéarmanant de maitrís chearnach $n\times n$.

1. Tá inbhéarta ag A má tá $\det(A)\neq 0$ agus sa chás sin amháin. Is inbhéarta de A é maitrís B le $AB = BA = I$, agus I ag seasamh don maitrís chéannachta.

$$I_{2\times2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\; I_{3\times3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\; I_{4\times4} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

   agus mar sin de.

2. Má tá dhá sraith nó dhá colún de A cothrom le chéile, tá $\det(A) = 0$.

3. Deirtear gur *maitrís triantánach uachtarach (upper triangular)* é A má tá $A_{ij} = 0$ i gcónaí nuair atá $i > j$. Ciallaíonn seo go bhfuil na hiontráil neamhnialais go léir de A ar an príomhthrasnán nó os cionn de. Mar shampla is maitrís triantánach uachtarach é

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Más maitrís triantánach uachtarach é A, is ionann $\det A$ agus toradh na hiontráil ar an príomhthrasnán de A. Sa sampla thuas, tá an deitéarmanant cothrom le $1 \times 3 \times 1 \times 2 = 6$. Is féidir é seo a fheiceáil ó thaobh modh na chomhfactóirí.

Tá scéal cosúil le seo ag baint le maitrísí triantánach íochtarach, ina bhfuil na hiontráil os cionn an príomhthrasnán go léir cothrom le nialas.

3.2.2 An Cuingeach (Adjoint nó Adjugate)

Leanfaimid ar aghaidh anois chun an tábhacht a bhaineann le chomhfactóirí a phlé níos mó. Bíodh A ina maitrís $n \times n$. Tabharfaimid an t-ainm C do mhaitrís na chomhfactóirí de A, ins an ionad (i, j) de C, tá comhfactóir A_{ij} mar ionad.

Sampla: $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

$$C = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \\ \\ -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \\ \\ \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -4 \\ 1 & 1 & -4 \\ -2 & 2 & 8 \end{pmatrix}$$

Is ionann *chuingeach* A (scríofa mar adj$A$ nó A^* agus trasuíomh (transpose) maitrís na chomhfactóirí de A. Ins an trasuíomh de C, tá na hiontráil ón chéad sraith de C sa chéad colún, tá na hiontráil ón dara sraith de C sa dara colún, agus mar sin de. Go ghinireálta, cuirtear trasuíomh A in iúl le A^T.

In ár sampla, tá

$$\text{adj}(A) = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -4 \\ 1 & 1 & -4 \\ -2 & 2 & 8 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & 2 \\ -4 & -4 & 8 \end{pmatrix}$$

Teoirim 3.2.1. *Le haghaidh maitrís cearnach ar bith A, tá gaol an-tábhachtach idir A agus a chuingeach* adj$A$. *Sin*

$$A \times \text{adj}(A) = \det(A) I_n = \text{adj}(A) \times A.$$

Seasann I_n don mhaitrís chéannacht $n \times n$.

Is féidir an teoirim seo a seiceáil go díreach le haghaidh an sampla thuas:

$$\begin{aligned} A \times \text{adj}(A) &= \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & 2 \\ -4 & -4 & 8 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 4(2)+0(-2)+1(-4) & 4(1)+0(1)+1(-4) & 4(-2)+0(2)+1(8) \\ 2(2)+2(-2)+0(-4) & 2(1)+2(1)+0(-4) & 2(-2)+2(2)+0(8) \\ 3(2)+1(-2)+1(-4) & 3(1)+1(1)+1(-4) & 3(-2)+1(2)+1(8) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = 4I_3. \end{aligned}$$